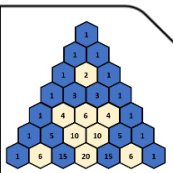
০৫

দ্বিপদী বিস্তৃতি

Binomial Expansions



এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

❑ **দ্বিপদী উপপাদ্য:**

(i) $(a + x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + ... + {}^nC_{n-1}ax^{n-1} + {}^nC_n x^n$

$= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + ... + nax^{n-1} + x^n$

(ii) $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + ...$

$+ \frac{n(n-1)(n-2)....(n-r+1)}{r!} x^r + ... + x_n$; যেখানে, $|x| < 1$

❑ **দ্বিপদী বিস্তৃতির পদ সংক্রান্ত:**

(i) $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা $(n + 1)$

(ii) $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ বা $(r + 1)$ তম পদ,

$T_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r}x^r$

(iii) $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে n জোড় হলে, মধ্যপদ হবে একটি এবং মধ্যপদটি $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তম পদ।

(iv) $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে n বিজোড় হলে, মধ্যপদ হবে $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম এবং $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ তম পদ।

(v) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

(iv) যদি ${}^nC_x = {}^nC_y$ এবং $x \neq y$, তবে $n = x + y$ হবে।

(v) $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতি $(r + 1)$ তম পদ ও r তম পদের অনুপাত

$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{x}{a}$

(vi) $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ বা $(r + 1)$ তম পদ,

$T_{r+1} = {}^nC_r x^r = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!} x^r$

(vii) $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে p তম ও q তম পদের সহগ সমান হলে,

$p + q = n + 2$

❑ **কিছু গুরুত্বপূর্ণ বিস্তৃতি: ($|x| < 1$ হলে)**

(i) $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^r + ... \infty$

(ii) $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^r x^r + ... \infty$

(iii) $(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + (r + 1) x^r + ... \infty$

(iv) $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ... + (-1)^r (r + 1) x^r + ... \infty$

(v) $(1 - x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + ... + \frac{1}{2}(r + 1)(r + 2) x^r + ... \infty$

(vi) $(1 + x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + ... + \frac{1}{2}(-1)^r (r + 1)$

$(r + 2) x^r + ... \infty$

❑ সূচকীয় ও লগারিদমিক ফাংশনের **বিস্তৃতি:**

(i) $ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ... \infty$ যখন $-1 < x \leq 1$

(ii) $ln(1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - .... \infty$ যখন $-1 < x \leq 1$

(iii) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \infty$

(iv) $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... \infty$

❑ **অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতির অভিসৃতি:**

যদি $u_1 + u_2 + ... u_r + ... \infty$ একটি অসীম ধারা

এবং $\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l}$ হয়, তবে প্রদত্ত ধারাটি–

(i) অভিসৃত হলে, $\boxed{l < 1}$, (ii) অপসৃত হলে, $\boxed{l > 1}$

সৃজনশীল (খ + গ) এর জন্য গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নোত্তর

1. $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে ধ্রুব পদটি এবং পদটির মান বের কর।

[ব. বো. ১৫; কু. বো. ১৩; য. বো. ০৭; KU 25-26; RU 20-21; BUET 17-18]

সমাধান: এখানে, $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6 = \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^6$

$= \left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right\}^6 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$

ধরি, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদটি x বর্জিত।

$\therefore T_{r+1} = {}^{12}C_r (x)^{12-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r\, {}^{12}C_r\, x^{12-2r}$

শর্তমতে, $12 - 2r = 0 \Rightarrow 2r = 12 \Rightarrow r = 6$

$\therefore$ (6 + 1) বা, 7 তম পদটি x বর্জিত।

$\therefore$ পদটির মান $= (-1)^6 \times {}^{12}C_6 = 924$ **(Ans.)**

2. $\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ হবে কয়টি? মধ্যপদ নির্ণয় কর।

[সি. বো. ০৯; মা. বো. ০৩; JnU 19-20; KUET 04-05]

সমাধান: এখানে, $\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)^{2n+1}$ দ্বিপদী রাশিটির ঘাত 2n + 1; যা একটি বিজোড় সংখ্যা। ঘাত বিজোড় বলে বিস্তৃতিতে মধ্যপদ হবে দুইটি। পদ দুইটি হলো $\left(\frac{2n+1+1}{2}\right)$ বা (n + 1) তম পদ এবং $\left(\frac{2n+1+3}{2}\right)$ বা (n + 2) তম পদ।

$\therefore$ প্রথম মধ্যপদ, $T_{n+1} = {}^{2n+1}C_n \left(\frac{a}{x}\right)^{2n+1-n} \left(\frac{x}{a}\right)^n$

$= {}^{2n+1}C_n \left(\frac{a}{x}\right)^{n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^n$

$= {}^{2n+1}C_n \frac{a}{x}$ **(Ans.)**

২য় মধ্যপদ, $T_{n+2} = {}^{2n+1}C_{n+1} \left(\frac{a}{x}\right)^{2n+1-n-1} \left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}$

$= {}^{2n+1}C_{n+1} \left(\frac{a}{x}\right)^n \left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}$

$= {}^{2n+1}C_{n+1} \frac{x}{a}$ **(Ans.)**

3. $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ এর n = 9 ও n = 12 এর জন্য প্রদত্ত বিস্তৃতির মধ্যপদের মান নির্ণয় কর। **[ব. বো. ১৯]**

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= \left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$

n = 9 হলে, রাশিটি হবে $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$। রাশিটির ঘাত বিজোড় তাই মধ্যপদ 2 টি।

$\therefore$ মধ্যপদগুলো হলো $\left(\frac{9+1}{2}\right)$ এবং $\left(\frac{9+1}{2} + 1\right)$ তম পদ,

= 5 এবং 6 তম পদ

$\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে 5 বা (4 + 1) তম পদ,

$= {}^9C_4 \times (3x^2)^{9-4} \times \left(-\frac{1}{x}\right)^4$

$= {}^9C_4\, 3^5\, x^{10} \frac{1}{x^4}$

$= 30618\, x^6$

এবং $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ বিস্তৃতিতে 6 বা (5 + 1) তম পদ,

$= {}^9C_5 \times (3x^2)^{9-5} \times \left(-\frac{1}{x}\right)^5$

$= -{}^9C_5\, 3^4\, x^8 \frac{1}{x^5}$

$= -10206\, x^3$

$\therefore$ n = 9 হলে, মধ্যপদগুলো $30618\, x^6$ এবং $-10206\, x^3$ **(Ans.)**

আবার, n = 12 হলে, রাশিটি হবে $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ রাশিটির ঘাত জোড় তাই মধ্যপদ 1 টি।

$\therefore$ মধ্যপদটি হলো $\left(\frac{12}{2} + 1\right)$ তম পদ = 7 তম পদ

$\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে 7 বা (6 + 1) তম পদ

$= {}^{12}C_6 (3x^2)^{12-6} \times \left(\frac{-1}{x}\right)^6$

$= {}^{12}C_6\, 3^6\, x^{12} \frac{1}{x^6}$

$= 673596\, x^6$

$\therefore$ n = 12 হলে, মধ্যপদটি $673596\, x^6$ **(Ans.)**

4. $\left(2x^2 + \frac{p}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগ দুটি পরস্পর সমান হলে, p এর মান নির্ণয় কর।

[কু. বো. ১৭; BUET 16-17, 00-01; KUET 10-11; SUST 09-10; BUTex 01-02]

সমাধান: প্রদত্ত বিস্তৃতি $= \left(2x^2 + \frac{p}{x^3}\right)^{10}$

এখন, (r + 1) তম পদ $= {}^{10}C_r (2x^2)^{10-r} \left(\frac{p}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r\, 2^{10-r}\, p^r\, x^{20-5r}$

x^5 এর জন্য, $20 - 5r = 5 \Rightarrow 5r = 15 \Rightarrow r = 3$

x^{15} এর জন্য, $20 - 5r = 15 \Rightarrow 5r = 5 \Rightarrow r = 1$

$\therefore x^5$ এর সহগ $= {}^{10}C_3\, 2^{10-3}\, p^3$

এবং x^{15} এর সহগ $= {}^{10}C_1\, 2^{10-1}\, p$

প্রশ্নমতে, ${}^{10}C_3\, 2^{10-3}\, p^3 = {}^{10}C_1\, 2^{10-1}\, p$

$\Rightarrow 120 \times 2^7\, p^2 = 10 \times 2^9 \quad [\because p \neq 0]$

$\Rightarrow p^2 = \frac{40}{120}$

$\Rightarrow p^2 = \frac{1}{3}$

$\therefore p = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

5. যদি $\left(2x^2+\frac{3}{x}\right)^{19}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম এবং (r + 2) তম পদের সহগ পরস্পর সমান হলে r এর মান কত? [BUET 08-09; চ. বো. ১৭]

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $=\left(2x^2+\frac{3}{x}\right)^{19}$

(r + 1) তম পদ $= {}^{19}C_r\,(2x^2)^{19-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r$

$= {}^{19}C_r \times 2^{19-r} \times 3^r \times x^{38-3r}$

(r + 2) তম পদ $= {}^{19}C_{r+1}\,(2x^2)^{19-(r+1)}\left(\frac{3}{x}\right)^{r+1}$

$= {}^{19}C_{r+1}\,2^{18-r}\,x^{36-2r}\,\frac{3^{r+1}}{x^{r+1}}$

$= {}^{19}C_{r+1} \times 2^{18-r} \times 3^{r+1}\,x^{35-3r}$

প্রশ্নমতে, ${}^{19}C_r \times 2^{19-r} \times 3^r = {}^{19}C_{r+1} \times 2^{18-r} \times 3^{r+1}$

$\Rightarrow \frac{19!}{r!(19-r)!} \times \frac{2^{19-r}}{2^{18-r}} = \frac{19!}{(r+1)!\,(19-r-1)!} \times \frac{3^{r+1}}{3^r}$

$\Rightarrow \frac{1}{r!(19-r)\,(18-r)!} \times 2 = \frac{1}{(r+1)\,r!(18-r)!} \times 3$

$\Rightarrow \frac{2}{19-r} = \frac{3}{r+1}$

$\Rightarrow 57 - 3r = 2r + 2$

$\Rightarrow 5r = 55$

$\therefore r = 11$ **(Ans.)**

6. x এর কোন মানের জন্য $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{20}$ দ্বিপদী বিস্তৃতিতে শেষ হতে পঞ্চম পদের মান 1240320 হবে?

সমাধান: $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে শেষ হতে 5 তম পদ হবে $\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4}\right)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম হতে ৫ম পদ।

$\therefore$ শেষ হতে ৫ম পদ,

$T_5 = {}^{20}C_4\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{20-4}\left(\frac{1}{4}\right)^4$

$= 4845 \times \frac{1}{2^{16}.\,x^8} \times \frac{1}{2^8}$

$= \frac{4845}{2^{24}.\,x^8}$

প্রশ্নমতে, $\frac{4845}{2^{24}.\,x^8} = 1240320$

$\Rightarrow \frac{1}{2^{24}.\,x^8} = 256$

$\Rightarrow \frac{1}{2^{24}.\,256} = x^8$

$\Rightarrow x = \sqrt[8]{\frac{1}{256 \times 2^{24}}}$

$\therefore x = \frac{1}{16}$ **(Ans.)**

7. $(1-x)^8\,(1+x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ কত? [কু. বো. ১১; য. বো. ০৬; DU 20-21]

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= (1-x)^8\,(1+x)^7$

$= (1-x)(1-x)^7\,(1+x)^7$

$= (1-x)\{(1-x)(1+x)\}^7$

$= (1-x)\,(1-x^2)^7$

$= (1-x)\,\{1 + {}^7C_1(-x^2) + {}^7C_2(-x^2)^2 + {}^7C_3(-x^2)^3 + {}^7C_4(-x^2)^4 + \ldots\ldots\}$

$= (1-x)\,\{1 - {}^7C_1x^2 + {}^7C_2x^4 - {}^7C_3x^6 + {}^7C_4x^8 - \ldots\ldots\}$

$\therefore x^7$ এর সহগ $= (-1)\,(-{}^7C_3) = {}^7C_3 = 35$ **(Ans.)**

8. p এবং q ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হবে, $(1+4x)^p\left(1+\frac{1}{4x}\right)^q$ এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ এবং পদটির মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $(1+4x)^p\left(1+\frac{1}{4x}\right)^q$

$= (1+4x)^p\left(\frac{4x+1}{4x}\right)^q$

$= \frac{(1+4x)^{p+q}}{(4x)^q} = \frac{(1+4x)^{p+q}}{4^qx^q}$

$\therefore$ বিস্তৃতিটির x বর্জিত পদ হবে $(1+4x)^{p+q}$ এর বিস্তৃতির x^q সম্বলিত পদ। কারণ, x^q উপর ও নিচ থেকে বাদ যাবে।

ধরি, $(1+4x)^{p+q}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদে x^q আছে।

$\therefore T_{r+1} = {}^{p+q}C_r\,(4x)^r = {}^{p+q}C_r\,4^r\,x^r$

এখন, $(1+4x)^{p+q}$ এর বিস্তৃতিতে x^q সংবলিত পদ $= {}^{p+q}C_q\,4^q\,x^q$

তাহলে, $\frac{(1+4x)^{p+q}}{4^qx^q}$ এর বিস্তৃতিতে,

x^q সম্বলিত পদ $= {}^{p+q}C_q = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}$ **(Ans.)**

9. $f(x) = \left(2-\frac{3}{x}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ দুইটির পার্থক্য নির্ণয় কর যখন x = 1 [ঢা. বো. ১৭]

সমাধান: এখানে, $f(x) = \left(2-\frac{3}{x}\right)^{15}$ দ্বিপদী রাশিটির ঘাত n = 15; যা একটি বিজোড় সংখ্যা। আমরা জানি, ঘাত বিজোড় হলে বিস্তৃতিতে মধ্যপদ থাকে দুইটি। পদ দুইটি হলো $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম পদ এবং $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ তম পদ।

প্রথম মধ্যপদটি $= \left(\frac{15+1}{2}\right) = 8$ তম পদ

এবং দ্বিতীয় মধ্যপদটি $= \left(\frac{15+3}{2}\right) = 9$ তম পদ

$\therefore$ প্রথম মধ্যপদ, $T_8 = {}^{15}C_7.2^{15-7}\left(-\frac{3}{x}\right)^7$

$= -{}^{15}C_7.2^8.3^7$; যখন x = 1

২য় মধ্যপদ, $T_9 = {}^{15}C_8.2^{15-8}\left(-\frac{3}{x}\right)^8$

$= {}^{15}C_8.2^7.3^8$; যখন x = 1

$\therefore$ মধ্যপদ দুইটির পার্থক্য,

$= |-{}^{15}C_7.2^8\,.\,3^7 - {}^{15}C_8.2^7.3^8|$

$= {}^{15}C_7.2^7.\,3^7\,(2+3) = 5.{}^{15}C_7.2^7.3^7$ **(Ans.)**

10. $(1 + 3y)^{2n}$, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$ বিস্তৃতির মধ্যপদটি হবে, $\frac{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1)}{n!} 6^n y^n$ [চ. বো. ১৯]

সমাধান: দেওয়া আছে, প্রদত্ত রাশি $(1 + 3y)^{2n}$ এবং রাশিটির ঘাত জোড় তাই রাশিটির মধ্যপদ 1 টি।

$\therefore$ মধ্যপদটি হলো $\left(\frac{2n}{2} + 1\right) = (n + 1)$ তম পদ

এখন, $(1 + 3y)^{2n}$ বিস্তৃতিতে $(n + 1)$ তম পদ,

$T_{n+1} = {}^{2n}C_n \times (1)^{2n-n} \times (3y)^n$

$= \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} \times (1)^n \times (3y)^n$

$= \frac{2n.(2n-1).(2n-2).....4.3.2.1}{n!\ n!} 3^n \times y^n$

$= \frac{1.3.5.....(2n-3)(2n-1)}{n!\ n!} \times 2.4.6.....(2n-2)2n \times 3^n \times y^n$

$= \frac{1.3.5.....(2n-3)(2n-1)}{n!\ n!} 2^n \{1.2.3.....(n-1)\ n\} \times 3^n \times y^n$

$= \frac{1.3.5.....(2n-3)(2n-1)}{n!\ n!} \times 2^n \times n! \times 3^n \times y^n$

$= \frac{1.3.5.....(2n-3)(2n-1)}{n!} 6^n y^n$ **(Showed)**

11. প্রমাণ কর যে, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটি হবে $\frac{1.3.4 \ldots\ldots (2n-1)}{n!} (-2)^n$; [যেখানে $n \in \mathbb{N}$] [চ. বো. ১৫, ১৩, ১০; সি. বো. ১৭, ১৫; কু. বো. ১৫, ১৬; দি. বো. ১৪; রা. বো. ১০, ০৭; য. বো. ০৯; ঢা. বো. ০৮]

সমাধান: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ রাশিটির ঘাত 2n, ($n \in \mathbb{N}$) যা জোড় সংখ্যা।

ঘাত জোড় হলে মধ্যপদটি হবে $\left(\frac{2n}{2} + 1\right)$ বা $(n + 1)$তম পদ।

$T_{n+1} = {}^{2n}C_n\, x^{2n-n} \left(-\frac{1}{x}\right)^n$

$= {}^{2n}C_n\, x^n \frac{(-1)^n}{x^n}$

$= (-1)^n\, {}^{2n}C_n$

$= \frac{(2n)!}{n!\ n!} (-1)^n$

$= \frac{2n\,(2n-1)\,(2n-2)\,(2n-3) \ldots\ldots 6.5.4.3.2.1}{n!\ n!} (-1)^n$

$= \frac{\{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1)\}\ \{2.4.6 \ldots\ldots (2n-2).2n\}}{n!\ n!} (-1)^n$

$= \frac{\{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1)\}\ 2^n\{1.2.3 \ldots\ldots (n-1).n\}}{n!\ n!} (-1)^n$

$= \frac{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1).n!}{n!\ n!} (-2)^n$

$= \frac{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1)}{n!} (-2)^n$ **(Proved)**

12. $(1 + 2y)^{20}$ রাশিটির বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত 11 : 20 হয়। পদ দুইটি নির্ণয় কর। [সি. বো. ১৭]

সমাধান: প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি: $(1 + 2y)^{20}$

ধরি, রাশিটির দুইটি ক্রমিক পদ T_{r+1}, T_{r+2}

এখন, $T_{r+1} = {}^{20}C_r \times (1)^{20-r} \times (2y)^r$

$= {}^{20}C_r \times 2^r \times y^r$

এবং $T_{r+2} = {}^{20}C_{r+1} \times (1)^{20-r-1} \times (2y)^{r+1}$

$= {}^{20}C_{r+1} \times 2^{r+1} \times y^{r+1}$

প্রশ্নমতে, $\frac{T_{r+1} \text{ এর সহগ}}{T_{r+2} \text{ এর সহগ}} = \frac{11}{20}$

$\Rightarrow \frac{{}^{20}C_r \times 2^r}{{}^{20}C_{r+1} \times 2^{r+1}} = \frac{11}{20}$

$\Rightarrow \frac{\frac{20!}{r!\,(20-r)!} \times 2^r}{\frac{20!}{(r+1)!\,(20-r-1)!} \times 2^{r+1}} = \frac{11}{20}$

$\Rightarrow \frac{(r+1)\,r!\,(19-r)!}{r!\,(20-r)\,(19-r)! \times 2} = \frac{11}{20}$

$\Rightarrow \frac{r+1}{20-r} = \frac{22}{20}$

$\Rightarrow 20r + 20 = 440 - 22r$

$\Rightarrow r = 10$

পদ দুইটি হলো $(10 + 1)$ বা 11 তম পদ এবং $(10 + 2)$ বা 12 তম পদ।

$\therefore$ 11 তম পদটি হলো ${}^{20}C_{10}\,(2y)^{10}$ **(Ans.)**

এবং 12 তম পদটি হলো ${}^{20}C_{11}\,(2y)^{11}$ **(Ans.)**

13. যদি $\left(2x^2 + \frac{3}{x}\right)^{19}$ এর বিস্তৃতিতে x^{38-3r} এর সহগ x^{35-3r} এর সহগের সমান হয়, তাহলে r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $= \left(2x^2 + \frac{3}{x}\right)^{19}$

ধরি, রাশিটির বিস্তৃতির $(k + 1)$ তম পদটি সাধারণ পদ।

$\therefore T_{k+1} = {}^{19}C_k\,(2x^2)^{19-k} \left(\frac{3}{x}\right)^k = {}^{19}C_k\, 2^{19-k}\, 3^k\, x^{38-3k}$

এখন, x এর সূচক তুলনা করে পাই,

$38 - 3k = 38 - 3r \Rightarrow k = r$

$\therefore x^{38-3r}$ এর সহগ $= {}^{19}C_r \times 2^{19-r} \times 3^r$

আবার, x^{35-3r} যুক্ত পদের জন্য,

$38 - 3k = 35 - 3r$

$\Rightarrow 3k = 38 - 35 + 3r \Rightarrow 3k = 3 + 3r$

$\therefore k = r + 1$

$\therefore x^{35-3r}$ এর সহগ $= {}^{19}C_{r+1} \times 2^{19-(r+1)} \times 3^{r+1}$

$= {}^{19}C_{r+1} \times 2^{18-r} \times 3^{r+1}$

প্রশ্নমতে, ${}^{19}C_r \times 2^{19-r} \times 3^r = {}^{19}C_{r+1} \times 2^{18-r} \times 3^{r+1}$

$\Rightarrow \frac{19!}{r!(19-r)!} \times \frac{2^{19-r}}{2^{18-r}} = \frac{19!}{(r+1)!\,(19-r-1)!} \times \frac{3^{r+1}}{3^r}$

$\Rightarrow \frac{1}{r!(19-r)\,(18-r)!} \times 2 = \frac{1}{(r+1)\,r!(18-r)!} \times 3$

$\Rightarrow \frac{2}{19-r} = \frac{3}{r+1}$

$\Rightarrow 57 - 3r = 2r + 2 \Rightarrow 5r = 55$

$\therefore r = 11$ **(Ans.)**

14. $f(x) = a + bx$, $b = 2$ এর জন্য $\{f(x)\}^m$ প্রথম তিনটি পদ k, $\frac{10}{3}kx$ এবং $\frac{40}{9}kx^2$ হলে a, k এবং m এর মান নির্ণয় কর। [য. বো. ১৯]

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = a + bx$ এবং $b = 2$

$\therefore f(x) = a + 2x$ এবং $\{f(x)\}^m = (a + 2x)^m$

এখন, $(a + 2x)^m = a^m + {}^mC_1a^{m-1}(2x) + {}^mC_2a^{m-2}(2x)^2 + ... + (2x)^m$

প্রশ্নমতে, প্রথম পদ, $a^m = k$ ..... (i)

দ্বিতীয় পদ, ${}^mC_1a^{m-1}(2x) = \frac{10}{3}kx$ ..... (ii)

তৃতীয় পদ, ${}^mC_2a^{m-2}(2x)^2 = \frac{40}{9}kx^2$ ..... (iii)

(ii) হতে পাই,

$m \times \frac{a^m}{a} \times 2x = \frac{10}{3}kx$

$\Rightarrow m \times \frac{k}{a} \times 2x = \frac{10}{3}kx$ [(i) হতে]

$\Rightarrow 5a = 3m$

$\therefore a = \frac{3m}{5}$ ..... (iv)

(iii) হতে পাই,

$\frac{m(m-1)}{2!}\frac{a^m}{a^2} \times 4x^2 = \frac{40}{9}kx^2$

$\Rightarrow \frac{m(m-1)}{2}\frac{k}{a^2} = \frac{10}{9}k$ [(i) হতে]

$\Rightarrow 9m(m-1) = 20a^2$

$\Rightarrow 9m(m-1) = 20 \times \left(\frac{3m}{5}\right)^2$ [(iv) হতে]

$\Rightarrow 9m(m-1) = 20 \times \frac{9m^2}{25}$

$\Rightarrow 25m(m-1) = 20m^2$

$\Rightarrow 5(m-1) = 4m \Rightarrow m = 5$ $[m \neq 0]$

এখন, $a = \frac{3 \times 5}{5} = 3$ এবং $k = 3^5$

$\therefore a = 3, k = 3^5$ এবং $m = 5$ **(Ans.)**

15. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত $1 : 7 : 42$ হলে, n এর মান নির্ণয় কর। [রা. বো. ১৪; য. বো. ০৩]

সমাধান: ধরি, $(1 + x)^n$ এর বিস্তারে $T_{r+1}, T_{r+2}, T_{r+3}$ তিনটি ক্রমিক পদ।

প্রশ্নমতে, ${}^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1 : 7 : 42$

$\Rightarrow \frac{{}^nC_r}{1} = \frac{{}^nC_{r+1}}{7} = \frac{{}^nC_{r+2}}{42}$

এখন, $\frac{{}^nC_{r+1}}{7} = \frac{{}^nC_r}{1}$

$\Rightarrow \frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{1}$

$\Rightarrow \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} \times \frac{r!\,(n-r)!}{n!} = \frac{7}{1}$

$\Rightarrow \frac{r!(n-r)(n-r-1)!}{(r+1)\,r!(n-r-1)!} = \frac{7}{1}$

$\Rightarrow \frac{n-r}{r+1} = \frac{7}{1}$

$\Rightarrow n - r = 7r + 7$

$\therefore n = 8r + 7$ ..... (i)

আবার, $\frac{{}^nC_{r+2}}{42} = \frac{{}^nC_{r+1}}{7}$

$\Rightarrow \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+1}} = \frac{42}{7}$

$\Rightarrow \frac{n!}{(r+2)!\,(n-r-2)!} \times \frac{(r+1)!\,(n-r-1)!}{n!} = 6$

$\Rightarrow \frac{(r+1)!\,(n-r-1)(n-r-2)!}{(r+2)(r+1)!(n-r-2)!} = 6$

$\Rightarrow \frac{n-r-1}{r+2} = 6$

$\Rightarrow n - r - 1 = 6r + 12$

$\therefore n = 7r + 13$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$8r + 7 = 7r + 13 \Rightarrow r = 13 - 7 \Rightarrow r = 6$ **(Ans.)**

(ii) নং এ $r = 6$ বসিয়ে পাই, $n = 7 \times 6 + 13 = 55$ **(Ans.)**

16. প্রমাণ কর যে, $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(n + 1)$ তম পদের সহগ $\frac{(2n)!}{(n!)^2\,2^n}$, যেখানে, $|x| < \frac{1}{2}$

[ঢা. বো. ১৯, ১৫, ১৪, ০৭; কু. বো. ১৩; মা. বো. ১২; চ. বো. ০৯, ১১; ব. বো. ১১; সি. বো. ০৪, ১০; কু. বো. ০৮]

সমাধান: প্রদত্ত বিস্তৃতি $= (1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$

এখন, $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(n + 1)$ তম পদ,

$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)...\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-2x)^n$

$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)...\left(\frac{-1-2n+2}{2}\right)}{n!}(-2)^n x^n$

$\therefore (n + 1)$ তম পদের সহগ $= \frac{(-1)(-3)(-5)...(-2n+1)}{2^n\,n!}(-1)^n 2^n$

$= \frac{(-1)^n\,1.3.5 ... (2n-1)}{n!}(-1)^n$

$= \frac{(-1)^{n+n}\,1.2.3.4.5.6 ... (2n-1)\,2n}{n!\,(2.4.6 ... 2n)}$

$= \frac{(-1)^{2n}\,(2n)!}{n!\,2^n\,(1.2.3... n)}$

$= \frac{(2n)!}{n!\,2^n\,n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2\,2^n}$ **(Showed)**

17. $P = 4x + 3$ হলে $P^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় করে বিস্তৃতিতে পঞ্চম পদটিও বের কর। [দি. বো. ১৭]

সমাধান: এখানে, $P^{-\frac{1}{2}} = (4x + 3)^{-\frac{1}{2}}$

$= (3 + 4x)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{4x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$

প্রদত্ত বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right).....\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}\left(\frac{4x}{3}\right)^r$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)....\left(-\frac{2r-1}{2}\right)}{\sqrt{3}.r!}\left(\frac{2^2x}{3}\right)^r$$

$$= \frac{(-1)^r\, 1.3.5 .... (2r-1)}{2^r\, r!.\sqrt{3}} \cdot \frac{2^{2r}}{3^r} x^r$$

$$= (-1)^r \frac{1.2.3.4.5.6 .... (2r-1).2r}{(2.4.6.8 .... 2r)r!\ .3^r\sqrt{3}} \cdot 2^r x^r$$

$$= \frac{(-1)^r (2r)!}{2^r(1.2.3.4 ....r)r!.3^r\sqrt{3}} . 2^r x^r = \frac{(-1)^r(2r)!}{(r!)^2.3^r\sqrt{3}} x^r$$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= \frac{(-1)^r(2r)!}{(r!)^2.3^r\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

r = 4 হলে পঞ্চম পদ পাওয়া যায়।

$\therefore$ পঞ্চম পদ $= \frac{(-1)^4\,(8)!}{(4!)^2.3^4\sqrt{3}} = \frac{40320}{576 \times 81\sqrt{3}} = \frac{70}{81\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

18. $h(x) = \frac{-8x}{1-x^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর। [কু. বো. ১৯]

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$h(x) = \frac{-8x}{1-x^2}$$

$$= \frac{-8x}{(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{-8\,(-1)}{(1+x)\,\{1-(-1)\}} + \frac{-8 \times 1}{(1-x)\,(1+1)}$$

[Thumb rule use করে]

$$= \frac{4}{(1+x)} + \frac{-4}{(1-x)}$$

$$= 4\,(1+x)^{-1} - 4(1-x)^{-1}$$

$$= 4\{(1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^r.x^r + ...)\}$$
$$- 4(1 + x + x^2 + ... + x^r .....)$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির x^r এর সহগ $= 4(-1)^r - 4$ **(Ans.)**

19. $\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর। [রা. বো. ০২]

সমাধান: $\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}$

$$= \frac{\frac{1}{a}}{(1-ax)\left(1-b\cdot\frac{1}{a}\right)} + \frac{\frac{1}{b}}{(1-bx)\left(1-a\cdot\frac{1}{b}\right)}$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{(1-ax)} - \frac{1}{(1-bx)}\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\,[(1-ax)^{-1} - (1-bx)^{-1}]$$

$$= \frac{1}{a-b}\,[\{1 + ax + (ax)^2 + \cdots + (ax)^n + ...\} -$$
$$\{1 + bx + (bx)^2 + \cdots + (bx)^n + ...\}]$$

$\therefore$ x^n এর সহগ $= \frac{1}{a-b}(a^n - b^n)$ **(Ans.)**

20. $\varphi(x) = lx^2 + mx + n$ এ $l = 42$, $m = -13$, $n = 1$ হলে $\{\varphi(x)\}^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^{99} এর সহগ নির্ণয় কর। [সি. বো. ১৯]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\varphi(x) = lx^2 + mx + n$

এবং $l = 42$, $m = -13$, $n = 1$

$$\therefore \{\varphi(x)\}^{-1} = (42x^2 - 13x + 1)^{-1}$$

$$= \frac{1}{42x^2 - 7x - 6x + 1}$$

$$= \frac{1}{\{7x\,(6x-1) - 1\,(6x-1)\}}$$

$$= \frac{1}{(7x-1)\,(6x-1)}$$

$$= \frac{1}{(7x-1)\left(6 \times \frac{1}{7} - 1\right)} + \frac{1}{(6x-1)\left(7 \times \frac{1}{6} - 1\right)}$$

[Thumb rule use করে]

$$= -\frac{7}{(7x-1)} + \frac{6}{(6x-1)}$$

$$= \frac{-7}{-(1-7x)} + \frac{6}{-(1-6x)}$$

$$= 7\,(1-7x)^{-1} - 6\,(1-6x)^{-1}$$

$$= 7\,\{1 + 7x + (7x)^2 + ... + (7x)^r + ...\}$$
$$- 6\,\{1 + 6x + (6x)^2 + ... + (6x)^r + ...\}$$

$\therefore$ x^r এর সহগ $= 7 \times 7^r - 6 \times 6^r$

$= 7^{r+1} - 6^{r+1}$

অর্থাৎ, x^{99} এর সহগ $= 7^{100} - 6^{100}$ **(Ans.)**

21. $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{y}{2} - \frac{3y^2}{8} + \frac{5y^3}{16} - ... \infty$

[সি. বো. ১৩, ০৯; দি. বো. ১১; ব. বো. ১০, ০৪; য. বো. ০৯, ০১; রা. বো. ০৭; কু. বো. ০৭; BUET 01-02; CUET 01-02]

সমাধান: $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$

$$\Rightarrow 1 + y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$$

$$\Rightarrow 1 + y = (1-x)^{-2}$$

$$\Rightarrow 1 + y = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow (1-x)^2 = \frac{1}{1+y}$$

$$\Rightarrow (1-x)^2 = (1+y)^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 - x = (1+y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 1 - x = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)y + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2$$
$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3 + ...$$

$$\Rightarrow 1 - x = 1 - \frac{y}{2} + \frac{3y^2}{8} - \frac{5y^3}{16} + ... \infty$$

$$\Rightarrow -x = -\frac{y}{2} + \frac{3y^2}{8} - \frac{5y^3}{16} + ... \infty$$

$\therefore$ $x = \frac{y}{2} - \frac{3y^2}{8} + \frac{5y^3}{16} - ... \infty$ **(Showed)**

22. $|x| < 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ বিস্তার করে যে দ্বিপদী ধারাটি পাওয়া যায় তা অভিসারী (Convergent)।

[দি. বো. ১৩; সি. বো. ১২, ০৬; য. বো. ১১, ০৮, ০৫; রা. বো. ১১, ০৮; কু. বো. ১১; ঢা. বো. ১০; ব. বো. ০৯; মা. বো. ০৯]

সমাধান: $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ এর অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতি:

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \dots$$

$$+ (-1)^r \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}x^r + \dots$$

ধরি, $r \to \infty$ এবং u_r ও u_{r+1} দ্বারা যথাক্রমে ধারাটির r তম ও (r + 1) তম পদ সূচিত করা হলো।

$$\therefore u_r = (-1)^{r-1}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-r+2\right)}{(r-1)!}x^{r-1}$$

এবং $u_{r+1} = (-1)^r \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}x^r$

$$\therefore \frac{u_{r+1}}{u_r} = -\frac{\left(\frac{1}{2}-r+1\right)(r-1)!}{r!}x$$

$$= -\frac{\left(\frac{3}{2}-r\right)}{r}x$$

$$= -\left(\frac{3}{2r}-1\right)x$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left|\frac{u_{r+1}}{u_r}\right| = |x| < 1$$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটি অভিসারী। **(Proved)**

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,n}{(n-1)!\,3^n}$ ধারাটির অভিসারিতা যাচাই কর। [কু. বো. ১৯]

সমাধান: প্রদত্ত ধারার সমষ্টি $= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n}{(n-1)!\,3^n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.(n-1)!n}{(n-1)!3^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$$

ধরি, ধারাটির n তম পদ, $U_n = \frac{n^2}{3^n}$

ধারাটির (n + 1) তম পদ, $U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$

আমরা জানি,

$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = l$ হলে, প্রদত্ত ধারাটি অভিসারী হবে যদি, $l < 1$ হয়।

এখন, $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^2}{3^n.3}\times\frac{3^n}{n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^2}{n^2}\times\frac{1}{3}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\times\frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}(1+0)^2$$

$$= \frac{1}{3} < 1$$

$\therefore$ ধারাটি অভিসারী। **(Justified)**

24. $x = \frac{2}{3}$ হলে, $(1+x)^{\frac{21}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে সংখ্যামান বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

[ব. বো. ০৬]

সমাধান: আমরা জানি, $(a \pm x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সংখ্যামান বৃহত্তম পদের ক্ষেত্রে, $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r}.\frac{x}{a} = 1$; যখন $n > 0$

$(1+x)^{\frac{21}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{\frac{21}{2}-r+1}{r}\times\frac{x}{1} = 1\left[\because n = \frac{21}{2} > 0\right]$$

$$\Rightarrow \frac{21-2r+2}{2r}\times\frac{2}{3} = 1 \qquad \left[\because x = \frac{2}{3}\right]$$

$$\Rightarrow 3r = 23 - 2r$$

$$\Rightarrow 5r = 23$$

$$\therefore r = \frac{23}{5} = 4.6$$

এখানে, r পূর্ণ সংখ্যা নয়। সুতরাং, (4 + 1) তম অর্থাৎ পঞ্চম পদটির সংখ্যামান বৃহত্তম পদ।

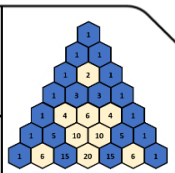
$$\therefore \text{পদটির মান}, T_5 = \frac{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-1\right)\left(\frac{21}{2}-2\right)\left(\frac{21}{2}-3\right)}{4!}\times\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$= \frac{21\times19\times17\times15}{2^4\times4!}\times\frac{2^4}{3^4}$$

$$= \frac{11305}{216} \textbf{ (Ans.)}$$

০৫ দ্বিপদী বিস্তৃতি

Binomial Expansions



বোর্ড পরীক্ষার জন্য গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

1. $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)^5$ একটি রাশি। রাশিটির বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা কত? [ঢা. বো. ১৭]

ক 5 খ 15
গ 16 ঘ 20

উত্তর: গ 16

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত রাশি $= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)^5$
$= \{(x + y)^3\}^5 = (x + y)^{15}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশির বিস্তৃতিতে মোট পদ সংখ্যা $= 15 + 1 = 16$

Note: $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হলে পদসংখ্যা অসীম হবে।

2. প্যাসকেলের ত্রিভুজে চতুর্থ সারির উপাদান কয়টি?

ক 2 খ 3
গ 4 ঘ 5

উত্তর: গ 4

ব্যাখ্যা: চতুর্থ সারির উপাদান = 1 3 3 1 (4টি)

3. $(x - 9y)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে দশম পদের মান কোনটি? [চ. বো. ১৯]

ক $-9^{10}y^{10}$ খ $-9^9 \times 10xy^9$
গ $9^{10}y^{10}$ ঘ $9^9 \times 10xy^9$

উত্তর: খ $-9^9 \times 10xy^9$

ব্যাখ্যা: $(x - 9y)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r . (x)^{10-r} . (-9y)^r$

$\therefore$ 10 বা $(9 + 1)$ তম পদ $= {}^{10}C_9 . (x)^{10-9} . (-9y)^9$
$= -9^9 \times 10xy^9$

4. $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতির r তম পদ কোনটি? [কু. বো. ১৭]

ক ${}^nC_{r-1}\, a^{n-r+1} . x^{r-1}$ খ ${}^nC_r\, a^{n-r} . a^r$
গ ${}^nC_{r-1} . a^{r-1} . x^{n-r+1}$ ঘ ${}^nC_r\, a^r . x^{a-r}$

উত্তর: ক ${}^nC_{r-1}\, a^{n-r+1} . x^{r-1}$

ব্যাখ্যা: $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ $= {}^nC_r . a^{n-r} . x^r$

$\therefore$ r বা $(r - 1 + 1)$ তম পদ $= {}^nC_{r-1} . a^{n-r+1} . x^{r-1}$

5. $\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটি হলো– [কু. বো. ১৭]

ক চতুর্থ খ পঞ্চম
গ অষ্টম ঘ নবম

উত্তর: ঘ নবম

ব্যাখ্যা: $\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)^8 = \left(x^2 + 2 . x . \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^8$
$= \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right\}^8 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{16}$

$\therefore$ n = 16; যা জোড় সংখ্যা

$\therefore$ মধ্যপদ একটি এবং তা হলো $\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \left(\frac{16}{2} + 1\right) = 9$ তম পদ

6. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{33}$ এর বিস্তৃতিতে কোন পদটি মধ্যপদ? [ব. বো. ১৯; চ. বো. ১৭]

ক 16 তম খ 17 তম
গ 16 তম এবং 17 তম ঘ 17 তম এবং 18 তম

উত্তর: ঘ 17 তম এবং 18 তম

ব্যাখ্যা: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{33}$ দ্বিপদীর n = 33 (বিজোড় সংখ্যা)

সুতরাং, প্রদত্ত বিস্তৃতিটির মধ্যপদ দুইটি হবে যথাক্রমে

$\frac{n + 1}{2} = \frac{33 + 1}{2} = 17$ তম পদ

এবং $\frac{n + 1}{2} + 1 = \frac{33 + 1}{2} + 1 = 18$ তম পদ

7. $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)^5$ একটি রাশি। বিস্তৃতির মধ্যপদ কয়টি? [ঢা. বো. ১৭]

ক 0 খ 1
গ 2 ঘ 3

উত্তর: গ 2

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত রাশি $= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)^5$
$= \{(x + y)^3\}^5 = (x + y)^{15}$

$\therefore$ n = 15 (বিজোড় সংখ্যা)

$\therefore$ মধ্যপদ হবে 2টি।

8. $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ– **[DU 15-16]**

ক 495 খ 4223 গ – 1760 ঘ 1760

উত্তর: গ – 1760

ব্যাখ্যা: $T_{r+1} = {}^{12}C_r\, (2x)^{12-r} \left(-\frac{1}{4x^2}\right)^r$
$= (-1)^r\, {}^{12}C_r\, 2^{12-3r}\, x^{12-3r}$

$\therefore$ $(r + 1)$ তম পদে x^3 থাকলে $12 - 3r = 3 \Rightarrow 3r = 9 \Rightarrow r = 3$

$\therefore$ x^3 এর সহগ $= {}^{12}C_3 \times (2)^{12-3} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -1760$

বিকল্প পদ্ধতি:

$(ax^p + bx^q)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদে x^m এর সহগ থাকলে,

$r = \frac{np - m}{p - q}$ এবং x^m এর সহগ $= {}^nC_r a^{n-r} b^r$

$\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12} = \left(2x^1 - \frac{1}{4}x^{-2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে,

$r = \frac{12 \times 1 - 3}{1 - (-2)} = 3$

$\therefore x^3$ এর সহগ $= {}^{12}C_3 2^{12-3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -1760$

9. $\left(2x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান কত?

[BSMRSTU 18-19; SUST 13-14; DU 16-17, 12-13; KU 06-07; CU 05-06]

ক 450 খ 600 গ 800 ঘ 840

উত্তর: ঘ 840

ব্যাখ্যা: $T_{r+1} = {}^{10}C_r (2x^2)^{10-r}\left(-\frac{1}{2x^3}\right)^r = (-1)^r\, {}^{10}C_r\, 2^{10-2r}\, x^{20-5r}$

শর্তমতে, $20 - 5r = 0$

$\Rightarrow 5r = 20$

$\Rightarrow r = 4$

$\therefore$ x বর্জিত পদ $= (-1)^4 \times {}^{10}C_4 (2)^{10-8} = 840$

10. $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ এর সম্প্রসারণে x বর্জিত পদটির মান কত?

[KU 25-26; RU 20-21, 17-18, 14-15, 12-13, 09-10; JU 18-19, 15-16, 06-07; CU 07-08]

ক 900 খ 925 গ 930 ঘ 924

উত্তর: ঘ 924

ব্যাখ্যা: $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$

$T_{r+1} = {}^{12}C_r . x^{12-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r . {}^{12}C_r . x^{12-2r}$

এ পদটি x বর্জিত হলে, $12 - 2r = 0 \Rightarrow r = 6$

$\therefore$ x বর্জিত পদটির মান $= (-1)^6 . {}^{12}C_6 = 924$

11. $\left(\frac{1}{x^2} - x^2\right)^4$ এর বিস্তৃতিতে কততম পদটি x-বর্জিত? [ব. বো. ১৭]

ক 2 খ 3

গ 8 ঘ 9

উত্তর: খ 3

ব্যাখ্যা: $T_{r+1} = {}^4C_r \times \left(\frac{1}{x^2}\right)^{4-r} \times (-x^2)^r$

$= {}^4C_r \times \frac{1}{x^{8-2r}} \times (-1)^r \times x^{2r} = {}^4C_r \times (-1)^r \times x^{4r-8}$

পদটি x বর্জিত হলে, $4r - 8 = 0 \Rightarrow r = 2$

$\therefore (r + 1) = (2 + 1)$ অর্থাৎ ৩য় পদ x বর্জিত।

12. $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ হলো– [সি. বো. ১৯]

ক $\frac{27}{28}$ খ $\frac{28}{27}$ গ 0.1 ঘ 3

উত্তর: খ $\frac{28}{27}$

ব্যাখ্যা: $\left(2x + \frac{1}{6x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ,

$T_{r+1} = {}^{10}C_r . (2x)^{10-r}\left(\frac{1}{6x}\right)^r = {}^{10}C_r . 2^{10-r} . \frac{1}{6^r} . x^{10-2r}$

x বর্জিত পদ হলে, $10 - 2r = 0 \Rightarrow r = 5$

$\therefore T_{5+1} = {}^{10}C_5 . 2^5 . \frac{1}{6^5} . x^0 = \frac{28}{27}$; যা x বর্জিত পদ।

13. $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ কোনটি?

ক $\frac{224}{3^8}$ খ $-\frac{224}{3^8}$ গ $\frac{242}{3^8}$ ঘ $-\frac{242}{3^8}$

উত্তর: ক $\frac{224}{3^8}$

ব্যাখ্যা: $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ,

$T_{r+1} = {}^9C_r . \left(\frac{2}{3}x^2\right)^{9-r} . \left(-\frac{1}{3x}\right)^r$

$= {}^9C_r . (-1)^r . \frac{2^{9-r}}{3^9} . x^{18-3r}$

x বর্জিত পদে, $18\text{-}3r = 0 \Rightarrow r = 6$

$\therefore T_{6+1} = {}^9C_6 . (-1)^6 . \frac{2^{9-6}}{3^9} . x^{18-18}$

$= \frac{224}{3^8}$; যা x বর্জিত পদ।

14. $(a + 2y)^n$ একটি বীজগণিতীয় রাশি। n = 5 হলে, বিস্তৃতিতে y^2 এর সহগ কত? [য. বো. ১৯]

ক $40a^5$ খ a^5 গ $40a^3$ ঘ a^2

উত্তর: গ $40a^3$

ব্যাখ্যা: n = 5 হলে প্রদত্ত রাশি $= (a + 2y)^5$

$T_{r+1} = {}^5C_r . (a)^{5-r} . (2y)^r$

$\therefore T_{2+1} = {}^5C_2 . (a)^{5-2} . (2y)^2$ [$\because r = 2$]

$= 10a^3 . 4y^2 = 40a^3y^2$

$\therefore y^2$ এর সহগ $= 40a^3$

15. $(1 + x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে 21 তম পদ ও 22 তম পদ দুইটি সমান হলে, x এর মান কত?

[RU 17-18; JUST 14-15; HSTU 12-13; KU 11-12; CU 11-12; JU 05-06]

ক $\frac{7}{8}$ খ $\frac{1}{8}$ গ $\frac{6}{7}$ ঘ $\frac{1}{7}$

উত্তর: ক $\frac{7}{8}$

ব্যাখ্যা: $T_{20+1} = {}^{44}C_{20}.x^{20}$ এবং $T_{21+1} = {}^{44}C_{21}.x^{21}$

শর্তমতে, ${}^{44}C_{21}.x^{21} = {}^{44}C_{20}.x^{20}$

$\Rightarrow \frac{x^{21}}{x^{20}} = \frac{{}^{44}C_{20}}{{}^{44}C_{21}} = \frac{44!}{20!\,(44-20)!} \times \frac{21!\,(44-21)!}{44!}$

$\therefore x = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$

16. $(1 + ax)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হলে, a = ? [JU 19-20; CU 17-18; BUET 12-13]

ক $\frac{5}{4}$ খ $\frac{4}{5}$ গ $\frac{16}{5}$ ঘ $\frac{5}{16}$

উত্তর: খ $\frac{4}{5}$

ব্যাখ্যা: $T_{r+1} = {}^8C_r.a^r x^r$

শর্তমতে, ${}^8C_3.a^3 = {}^8C_4.a^4 \Rightarrow a = \frac{{}^8C_3}{{}^8C_4} = \frac{4}{5}$

17. $\left(2x^2 + \frac{k}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগদ্বয় সমান হলে, k এর মান কত?

[KUET 18-19; RU 17-18, 05-06; JU 13-14; DU 11-12; KU 08-09, 03-04]

ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ গ $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ঘ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

উত্তর: গ $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

ব্যাখ্যা: $\left(2x^2 + \frac{k}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1)তম পদ,

$= {}^{10}C_r (2x^2)^{10-r} \left(\frac{k}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r\, 2^{10-r} k^r x^{20-5r}$

(r + 1)তম পদে x^5 থাকলে $20 - 5r = 5 \Rightarrow r = 3$

(r + 1)তম পদে x^{15} থাকলে $20 - 5r = 15 \Rightarrow r = 1$

প্রশ্নমতে, ${}^{10}C_3\, 2^{10-3} k^3 = {}^{10}C_1\, 2^{10-1} k$

$\Rightarrow 120 \times 128k^3 = 5120\, k$

$\Rightarrow 3k^3 = k$

$\Rightarrow k(3k^2 - 1) = 0$

$\therefore k = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

18. $\left(3 + \frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এবং x^8 এর সহগ দুইটি সমান হলে n এর মান কত?

ক 45 খ 55 গ 65 ঘ 75

উত্তর: খ 55

ব্যাখ্যা: $(1 + ax)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ দুটি পরস্পর সমান হলে, $a = \frac{r+1}{n-r}$

প্রদত্ত বিস্তৃতি: $\left(3 + \frac{x}{2}\right)^n = 3^n\left(1 + \frac{x}{6}\right)^n$

এখন, $a = \frac{r+1}{n-r}$

$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{7+1}{n-7}$ $\left[\because a = \frac{1}{6}, r = 7\right]$

$\Rightarrow n - 7 = 48$

$\Rightarrow n = 55$

19. $(1 - 2x)^{19}$ একটি দ্বিপদী রাশি। রাশিটির বিস্তৃতিতে 4 তম ও 5 তম পদ সমান হলে x এর মান কোনটি? [সি. বো. ১৯]

ক $-\frac{1}{3}$ খ $-\frac{1}{8}$

গ $\frac{1}{3}$ ঘ $\frac{1}{8}$

উত্তর: খ $-\frac{1}{8}$

ব্যাখ্যা: $T_{r+1} = {}^{19}C_r . (1)^{19-r} . (-2x)^r$

$T_4 = T_{3+1} = {}^{19}C_3 . (1)^{19-3} . (-2x)^3$

$T_5 = T_{4+1} = {}^{19}C_4 . (1)^{19-4} . (-2x)^4$

প্রশ্নমতে, ${}^{19}C_3 . (-1)^3 . 2^3 . x^3 = {}^{19}C_4 . (-1)^4 . 2^4 . x^4$

$\Rightarrow x = -\frac{{}^{19}C_3 . 2^3}{{}^{19}C_4 . 2^4}$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{8}$

20. যদি $(x + 1)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে r-তম পদের সহগ (r + 4) তম পদের সহগের সমান হয় তবে r এর মান হবে– [ঢা. বো. ১৯]

ক 3 খ 9

গ 12 ঘ 18

উত্তর: খ 9

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত দ্বিপদী $= (x + 1)^{20} = (1 + x)^{20}$

r তম পদ $= T_r = T_{(r-1)+1} = {}^{20}C_{r-1}\, x^{r-1}$

(r + 4) তম পদ $= T_{(r+3)+1} = {}^{20}C_{r+3}\, x^{r+3}$

প্রশ্নমতে, ${}^{20}C_{r-1} = {}^{20}C_{r+3}$

$\therefore 20 = (r - 1) + (r + 3)$ [${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে, n = x + y হবে]

$\Rightarrow 2r = 18$

$\Rightarrow r = 9$

21. $\frac{1}{\sqrt{1 - 7x}}$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ– [য. বো. ১৭]

ক $-\frac{147}{4}$ খ $-\frac{147}{8}$ গ $\frac{147}{8}$ ঘ $\frac{147}{4}$

উত্তর: গ $\frac{147}{8}$

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{\sqrt{1 - 7x}} = (1 - 7x)^{-\frac{1}{2}}$

$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-7x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}(-7x)^2 + \ldots$

$= 1 + \frac{7}{2}x + \frac{3 \times 7^2}{4 \times 2!}x^2 + \ldots$

$\therefore x^2$ এর সহগ $= \frac{3 \times 7^2}{4 \times 2!} = \frac{147}{8}$

22. $|2x| < 1$ এর জন্য x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে $\sqrt{1 + 2x}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ k হলে, k এর মান কত?

ক $-\frac{1}{2}$ খ $-\frac{1}{16}$ গ $\frac{1}{16}$ ঘ $\frac{1}{2}$

উত্তর: ঘ $\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: $\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{2}}$; $|2x| < 1$

$= 1 + \frac{1}{2} \times 2x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(2x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(2x)^3 + ...$

$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - ....$

$\therefore$ x^3 এর সহগ, $k = \frac{1}{2}$

23. $\frac{1+x}{1-x}$ এর বিস্তৃতিতে x^9 এর সহগ কত হবে? [JU 17-18, 13-14, 06-07]

ক 1 খ 2 গ 4 ঘ 8

উত্তর: খ 2

ব্যাখ্যা: $\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1-x)^{-1}$

$= (1+x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^8 + x^9 + ...)$

$\therefore$ x^9 এর সহগ $= 1 + 1 = 2$

24. $|x| < 1$ শর্তে $\frac{1+2x}{1-x}$ এর ব্রিতিতে x^9 এর সহগ– [DU 14-15]

ক 1 খ 5 গ 2 ঘ 3

উত্তর: ঘ 3

ব্যাখ্যা: $\frac{1+2x}{1-x} = (1+2x)(1-x)^{-1}$

$= (1+2x)(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^8 + x^9 + ...)$

$\therefore$ x^9 এর সহগ $= (1 + 2) = 3$

25. $-x(1+x)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে ১ম তিনটি পদের সহগের সমষ্টি কত? [সকল বোর্ড ১৮]

ক -3 খ -1 গ 1 ঘ 3

উত্তর: খ -1

ব্যাখ্যা: $-x(1+x)^{-1} = -x(1 - x + x^2 - x^3 + ...)$

$= -x + x^2 - x^3 + x^4 - .....$

$\therefore$ ১ম তিনটি পদের সহগের সমষ্টি $= -1 + 1 - 1 = -1$

26. $\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}$ এর বিস্তৃতিটি অভিসারী হলে, নিচের কোনটি সঠিক? [ব. বো. ১৭]

ক $|x| \le 3$ খ $|x| < 3$ গ $|x| > 3$ ঘ $|x| \ge 3$

উত্তর: খ $|x| < 3$

ব্যাখ্যা: $\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}$ বিস্তৃতিটি অভিসারী হলে, $\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 3$ হবে।

27. x এর কোন মানের জন্য $(5-4x)^{\frac{1}{2}}$ অভিসৃত হবে?

ক $|x| > \frac{5}{4}$ খ $|x| > 5$

গ $|x| < \frac{5}{4}$ ঘ $|x| < 4$

উত্তর: গ $|x| < \frac{5}{4}$

ব্যাখ্যা: $(5-4x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}\left(1-\frac{4x}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

বিস্তৃতিটির অভিসৃত হওয়ার শর্ত: $\left|\frac{4x}{5}\right| < 1$

$\Rightarrow -1 < \frac{4x}{5} < 1$

$\Rightarrow -\frac{5}{4} < x < \frac{5}{4}$

$\Rightarrow |x| < \frac{5}{4}$

28. $(1-x)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে– [কু. বো. ১৭]

i. মোট পদের সংখ্যা 12 ii. ১ম পদের মান 1

iii. শেষ পদের মান $-x^{11}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $(1-x)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে $n = 11$

$\therefore$ পদসংখ্যা $= n + 1 = 12$ [(i) নং সঠিক]

আবার, $T_{r+1} = {}^{11}C_r (1)^{11-r} (-x)^r$

১ম পদ $= T_{0+1} = {}^{11}C_0 (1)^{11-0} (-x)^0 = 1$ [(ii) নং সঠিক]

শেষ পদ $= T_{11+1} = {}^{11}C_{11} (1)^{11-11} (-x)^{11} = -x^{11}$ [(iii) নং সঠিক]

29. $n \in \mathbb{N}$ হলে $(x+2y)^n$ দ্বিপদীর বিস্তৃতিতে– [দি. বো. ১৯]

i. ১ম পদ $= x^n$ ii. মোট পদসংখ্যা $= n + 1$

iii. $n = 8$ হলে, 5 তম পদ হবে মধ্যপদ

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $(x+2y)^n$ দ্বিপদীর বিস্তৃতিতে,

১ম পদ $= T_{0+1} = {}^nC_0 (x)^{n-0} (2y)^0 = x^n$ [(i) নং সঠিক]

পদসংখ্যা $= n + 1$ [(ii) নং সঠিক]

$n = 8$ হলে, পদসংখ্যা হবে $8 + 1$ বা, 9টি এবং মধ্যপদ হবে একটি

$\therefore$ মধ্যপদ $= \left(\frac{n}{2}+1\right)$ বা 5 তম পদ। [(iii) নং সঠিক]

30. $\left(1-\frac{y}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে– [ঢা. বো. ১৯]

i. ৩য় পদ $= \frac{n(n-1)y^2}{8}$

ii. n বিজোড় হলে মধ্যপদ হবে $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ও $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ তম পদ

iii. $n = -\frac{1}{2}$ হলে রাশিটির বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা অসীম হবে যদি $|y| < 2$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $T_{r+1} = {}^nC_r\,(1)^{n-r}\left(\frac{-y}{2}\right)^r$

$\therefore T_{2+1} = {}^nC_2\,(1)^{n-2}\left(\frac{-y}{2}\right)^2$

$= \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{y^2}{4}$

$= \frac{n(n-1)}{8}y^2$ [(i) নং সঠিক]

(ii) n বিজোড় হলে মধ্যপদ হবে 2টি। একটি $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম এবং অপরটি $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ বা $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ তম। [(ii) নং সঠিক]

(iii) $n = -\frac{1}{2}$ হলে রাশিটির বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা অসীম হবে যদি $\left|\frac{y}{2}\right| < 1$

$\Rightarrow |y| < 2$ হয়। [(iii) নং সঠিক]

31. $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{10}$ **এর বিস্তৃতিতে–** [সি. বো. ১৭]

i. পদ সংখ্যা 11 **ii. মধ্যপদ সংখ্যা 2**

iii. তৃতীয় পদের সহগ 45

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{10}$ দ্বিপদীর বিস্তৃতিতে

পদ সংখ্যা = n + 1 = 10 + 1 = 11 [(i) নং সঠিক]

যেহেতু, n = 10 জোড় সংখ্যা

∴ মধ্যপদ হবে একটি। [(ii) নং সঠিক নয়]

আবার, $T_{r+1} = {}^{10}C_r \times \left(\frac{x}{y}\right)^{10-r} \times \left(\frac{y}{x}\right)^r$

$\therefore T_{2+1} = {}^{10}C_2 \times \left(\frac{x}{y}\right)^{10-2} \times \left(\frac{y}{x}\right)^2 = {}^{10}C_2 \times \frac{x^8}{y^8} \times \frac{y^2}{x^2} = 45\,\frac{x^6}{y^6}$

∴ তৃতীয় পদের সহগ = 45 [(iii) নং সঠিক]

Prepared By

Abhi Datta Tushar

ME'15, BUET

CEO, ACS Group

Managing Director, Rhombus Publications

Founder: Rhombus Parallel Science Hub

https://www.rhombuspublications.com